Ecuaciones Diferenciales – 1er cuatrimestre 2010

PRÁCTICA 1 – ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

1. Resolver
$$\begin{cases} x \cdot \nabla u &= |x|^2, \\ u|_{x_1=1} &= 3x_n. \end{cases}$$
Estudiar el dominio de definición de la solución.

2. Mostrar, por consideraciones geométricas, que la solución general de
$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
es $u(x, y) = f(xy)$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$.

   Encontrar la solución cuyo gráfico contiene a la recta de ecuación $y = x$.

   ¿Qué pasa con el problema de valores iniciales cuando estos se dan sobre la curva $y = 1/x$?

3. Probar que no existe solución de la ecuación
$$u_x + u_y = u$$
que satisfaga las condiciones iniciales $u = 1$ en la recta $y = x$.

4. Probar que la solución de la ecuación
$$u_x + u_y = u^2$$
con condición inicial $u(x, -x) = x$ no está definida sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.

5. Sea $u(x, t)$ la solución clásica del problema
$$\begin{cases} u_t + f(x, t)u_x &= \psi(x, t), \\ u|_{t=0} &= u_0(x). \end{cases}$$
Ver que sobre las trayectorias $(x(t), t)$, u se expresa como
$$u(x(t), t) = u_0(x(0)) + \int_0^t \psi(x(\xi), \xi)d\xi.$$

6. Hallar la solución de la ecuación
$$(x^2 + y^2)u_x + 2xyu_y = (x + y)u$$
que satisface $u(0, y) = y$.

7. Dado
$$Lu \equiv x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} - 3u,$$
resolver:

   (a) $\begin{cases} Lu &= 0, \\ u(x, y, 0) &= xy. \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} Lu &= 0, \\ u(x, y, 0) &= f(x, y), \end{cases}$
   imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad a f.